Aufgabe 4
Sei T_h die Anzahl der Knoten.

Nach dem Script gilt $T_h \leq 2^{h+1} - 1$.

Der Beweis der anderen Ungleichung erfolgt per Induktion.

Wir haben einen Induktionsanfang für T_0 und T_1.

Ein AVL-Baum der Höhe 0 hat einen Knoten. Es gilt
$\frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 - 1$
$= \frac{5+2\sqrt{5}}{5} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5} - 1$
$= 1 = T_0$
Ein AVL-Baum der Höhe 1 hat mindestens zwei Knoten. Es gilt
$\frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 - 1$
$= \frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) - 1$
$= \frac{5+2\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{10} + \frac{5-2\sqrt{5}-5\sqrt{5}+10}{10} - 1$
$= \frac{30}{10} - 1 = 2 = T_1$

Induktionsschluss: Ein Baum der Höhe $h+2$ besteht aus Wurzel und Teilbäumen der Höhe $h+1$ und h, wenn es möglichst wenige Knoten geben soll.
Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung
$T_{h+2} \geq 1 + T_{h+1} + T_h$
$= 1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{h+1} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{h+1} - 1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^h + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^h - 1$
$= \frac{5+2\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{h+1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^h] + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}[(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{h+1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^h] - 1$
$= \frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^h(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1) + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^h(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1) - 1$
$= \frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^h(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^h(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 - 1$
$= \frac{5+2\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{h+2} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{h+2} - 1$