1 Logikkalkül

Regeln des Kalküls

AS1	$\sim A \vee A$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
RS1	$A \vee A \vdash A$	Verkürzungsregel
RS2	$A \vdash B \vee A$	Ausdehnungsregel
RS3	$A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$	Assoziativgesetz
RS4	$\vdash A \vee B$ $\underline{\vdash \sim A \vee C}$ $\vdash B \vee C$	Schnittregel
RS5		Einsetzungsregel
AS2	$A_x[t] \rightarrow \exists x A[x]$	Einsetzungsaxiom
AS3	$t_1 = t_1' \wedge \ldots \wedge t_n = t_n'$ $\longrightarrow f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1', \ldots, t_n')$	Gleichheitsaxiom
AS4	$x = x$	Identitätsaxiom
RS6	$\underline{A \longrightarrow B}$ $A \longrightarrow (\exists x B)$	$\exists$-Einführung

Beispiel: $(A \vee \sim A)$

1	$\sim A \vee A$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
2	$\sim\sim A \vee \sim A$	Einsetzung von $\sim A$ in 1
3	$A \vee \sim A$	Schnittregel aus 1 und 2

Beispiel: Kommutativität $(A \vee B) \longrightarrow (B \vee A)$

1	$A \vee B$	Prämisse
2	$\sim A \vee A$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
3	$B \vee A$	Schnittregel (1, 2)

Beispiel: Spezialisierung $\forall x A[x] \longrightarrow A[t]$

1	$\sim \exists x \sim A[x]$	Prämisse
2	$\sim\sim A[t] \vee \sim A[t]$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
3	$\sim A[t] \longrightarrow \sim A[t]$	2 umformuliert
4	$\sim A[t] \longrightarrow \exists x \sim A[x]$	RS6
5	$A[t] \vee \exists x \sim A[x]$	4 umformuliert
6	$\exists x \sim A[x] \vee A[t]$	Kommutativität (5)
7	$A[t] \vee \sim \exists x \sim A[x]$	Ausdehnung (1)
8	$\sim \exists x \sim A[x] \vee A[t]$	Kommutativität (7)
9	$A[t] \vee A[t]$	Schnittregel (6 und 8)
10	$A[t]$	Verkürzungsregelregel (9)

Beispiel: Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

Alle Menschen sind sterblich: $\forall x M(x) \longrightarrow S(x)$

Das ist gleichbedeutend mit $\sim \exists x \sim (\sim M(x) \vee S(x))$

Wir betrachten die Prämissen als Axiome und wollen auf $S(Sokrates)$ schließen.

1	$\sim \exists x \sim (\sim M(x) \vee S(x))$	1. Prämisse
2	$M(Sokrates)$	2. Prämisse
3	$\sim M(Sokrates) \vee S(Sokrates)$	Spezialisierung (1)
4	$S(Sokrates) \vee M(Sokrates)$	Ausdehnung (2)
5	$M(Sokrates) \vee S(Sokrates)$	Kommutativität (4)
6	$S(Sokrates) \vee S(Sokrates)$	Schnittregel (5 und 3)
7	$S(Sokrates)$	Verkürzungsregel (6)

2 Resolution

Beispiel: Alle Menschen sind sterblich und Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

Alle Menschen sind sterblich: $\forall x M(x) \longrightarrow S(x)$

Das ist gleichbedeutend mit $\forall x(\sim M(x) \vee S(x))$

Wir betrachten die Prämissen als Axiome und nehmen die Negation von $S(Sokrates)$ hinzu. Die Behauptung ist bewiesen, wenn sich die leere Klausel ableiten lässt.

Nr	Clause	Bem.	Unifikation
1	$\sim M(x) \vee S(x)$	1. Prämisse	
2	$M(Sokrates)$	2. Prämisse	
3	$\sim S(Sokrates)$	negierte Behauptung	
4	$\sim M(Sokrates)$	Resolution (1,3)	$Sokrates/x$
5	$\square$	Resolution (2,4)	

Beispiel:

$x \leq y$ und $y \leq z \longrightarrow x \leq z$

$x \leq y \leftrightarrow y \geq x$

$\underline{a \geq b \text{ und } b \geq c}$

$a \geq c$

Nr	Clause	Bem.	Unifikation
1	$\sim (x \leq y) \vee \sim (y \leq z) \vee (x \leq z)$	1. Prämisse	
2	$\sim (x \leq y) \vee (y \geq x)$	2. Prämisse	
3	$\sim (y \geq x) \vee (x \leq y)$	2. Prämisse	
4	$a \geq b$	3. Prämisse	
5	$b \geq c$	3. Prämisse	
6	$\sim (a \geq c)$	negierte Behauptung	
7	$\sim (c \leq a)$	Resolution 6,2	$a/y, c/x$
8	$\sim (c \leq y) \vee \sim (y \leq a)$	Resolution 7,1	$c/x, a/z$
9	$\sim (a \geq y) \vee \sim (c \leq y)$	Resolution 8,3	$y/x, a/y$
10	$\sim (a \geq y) \vee \sim (y \geq c)$	Resolution 9,3	c/x
11	$\sim (b \geq c)$	Resolution 10,4	b/y
12	$\square$	Resolution 11,5	