Verallgemeinerung der Möbiusschen μ-Funktion

Uwe Mylatz

24. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1	**Einführung**	**2**
2	**Verallgemeinerung**	**5**
3	φ	**11**
4	**Folgerungen**	**15**

1 Einführung

In diesem Paper sollen einige multiplikative Funktionen aus der Zahlentheorie verallgemeinert werden. Vor allem wird zur Summatorfunktion F für jedes n die n-te Summatorfunktion F_n und zur Moebiusschen Funktion μ für jedes n die Funktion μ_n definiert.

Die Primzahlzerlegung von a sei gegeben durch $a = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$.

Sei $\mathbb{N}^\times := \{n \in \mathbb{N} | n > 0\}$.

Im Kurs Elementare Zahlentheorie der Fernuniversität Hagen[1] werden die folgenden Definitionen und Sätze zu zahlentheoretischen Funktionen gegeben:

Definition 1.

- $f : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$ *heißt zahlentheoretische Funktion.*
- f *heißt multiplikativ, gdw.* $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ *für alle* $a, b \in \mathbb{N}^\times$ *mit* $ggT(a, b) = 1$.[2]
- $\tau : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $\tau(a) :=$ *Anzahl der positiven Teiler von* a.
- $P : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $P(a) :=$ *Produkt der positiven Teiler von* a.
- $\sigma : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $\sigma(a) :=$ *Summe der positiven Teiler von* a.
- $o : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $o(1) := 1$ *und* $o(a) := 0$ *für* $a \neq 1$.
- $e : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $e(a) := 1$ *für alle* $a \in \mathbb{N}^\times$.
- $i : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $i(a) := a$ *für alle* $a \in \mathbb{N}^\times$.
- $i_k : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $i_k(a) := a^k$ *für alle* $a \in \mathbb{N}^\times$.
- $\varphi : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $\varphi(a) :=$ *Anzahl der Zahlen aus* $\{1, 2, ..., a\}$ *ohne gemeinsame Teiler mit* $a \in \mathbb{N}^\times$. φ *heißt Eulersche Funktion.*
- $\mu : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$, $\mu(a) := 0$, *gdw.* $d^2 \mid a$, $d > 1$ *existiert,* $\mu(a) := (-1)^r$, *gdw.* $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ *sonst.* μ *heißt Möbiussche* μ*-Funktion.*
- F *heißt Summatorfunktion von* f, *gdw.* $F(a) = \sum_{d|a} f(d)$.

[1] [Rem 81]
[2] ggT = größter gemeinsamer Teiler

Beispiel 1.

- τ *ist multiplikativ. Es gilt z.B.* $\tau(10) = |\{1, 2, 5, 10\}| = 4$ *und* $\tau(2) \cdot \tau(5) = |\{1, 2\}| \cdot |\{1, 5\}| = 2 \cdot 2 = 4$
- P *ist nicht multiplikativ. Es gilt z.B.* $P(10) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$*, aber* $P(2) \cdot P5) = (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 5) = 10$
- σ *ist multiplikativ. Z.B. gilt* $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ *und* $\sigma(2) \cdot \sigma(5) = (1 + 2) \cdot (1 + 5) = 3 \cdot 6 = 18$
- o *ist multiplikativ. Z.B.* $o(10) = 0$ *und* $o(2) \cdot o(5) = 0 \cdot 0 = 0$
- e *ist trivialerweise multiplikativ.* $e(10) = 1$ *und* $e(2) \cdot e(5) = 1 \cdot 1 = 1$
- i *ist auch multiplikativ. So gilt* $i(10) = 10$ *und* $i(2) \cdot i(5) = 2 \cdot 5 = 10$
- i_k *ist multiplikativ. So gilt* $i_2(10) = 10^2 = 100$ *und* $i_2(2) \cdot i_2(5) = 4 \cdot 25 = 100$
- φ *ist multiplikativ. Es gilt z.B.* $\varphi(10) = |\{1, 3, 7, 9\}| = 4$ *und* $\varphi(2) \cdot \varphi(5) = |\{1\}| \cdot |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$
- μ *ist multiplikativ. Es gilt z.B.* $\mu(10) = (-1)^2 = 1$ *und* $\mu(2) \cdot \mu(5) = (-1) \cdot (-1) = 1$*. Oder* $\mu(12) = 0$ *und* $\mu(4) \cdot \mu(3) = 0 \cdot (-1) = 0$.

Theorem 1 (Remmert)**.**

- *Eine Funktion f ist multiplikativ, gdw. sie multiplikativ für Primzahlzerlegungen ist.*
- *Wenn f multiplikativ ist, dann ist auch die Summatorfunktiom F multiplikativ.*
- *Wenn F multiplikativ ist, dann ist f auch multiplikativ und für* $a = \prod_{\rho=1}^{r}(p_\rho^{m_\rho}) > 1$ *gilt*

$$f(a) = \prod_{\rho=1}^{r}(F(p_\rho^{m_\rho}) - F(p_\rho^{m_\rho - 1})).$$

- *Funktionalgleichung von φ:* $\sum_{d|a} \varphi(d) = a$.
- *Die Summatorfunktion von φ ist i.*
- $\varphi(a) = a \prod_{p|a}(1 - \frac{1}{p})$ *für alle* $a > 1$.

- *μ ist die Funktion, deren Summatorfunktion o ist.*
- *Symmetriesatz:* $\sum_{d|a} f(d)G(\frac{a}{d}) = \sum_{d|a} g(d)F(\frac{a}{d})$.
- *Möbiussche Umkehrformel: f(a)=* $\sum_{d|a} \mu(d)F(\frac{a}{d}) = \sum_{d|a} \mu(\frac{a}{d})F(d)$.
- *Die Summatorfunktion von φ ist i, die von i ist σ. Die Summatorfunktion von μ ist o, die von o ist e, die von e ist τ. Die Summatorfunktion von $\frac{\mu}{i}$ ist $\frac{\varphi}{i}$.*

Beispiel 2.

- *Funktionalgleichung von φ: Sei $a = 12$. Dann gilt*
$\sum_{d|a} \varphi(d) = \varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(12) = 1+1+2+2+2+4 = 12$
- $\varphi(a) = a \prod_{p|a}(1 - \frac{1}{p})$*: Sei $a = 12$. Dann gilt $\varphi(12) = 4$ und*
$a \prod_{p|a}(1 - \frac{1}{p}) = 12 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{6} = 4$
- *Symmetriesatz: Die Summatorfunktion von φ ist i und die Summatorfunktion von e ist τ. Es gilt*
$\sum_{d|12} \varphi(d)\tau(\frac{12}{d}) = \varphi(1) \cdot \tau(\frac{12}{1}) + \varphi(2) \cdot \tau(\frac{12}{2}) + \varphi(3) \cdot \tau(\frac{12}{3}) + \varphi(4) \cdot \tau(\frac{12}{4}) + \varphi(6) \cdot \tau(\frac{12}{6}) + \varphi(12) \cdot \tau(\frac{12}{12}) = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 28$
und $\sum_{d|12} i(d)e(\frac{12}{d}) = i(1) \cdot e(\frac{12}{1}) + i(2) \cdot e(\frac{12}{2}) + i(3) \cdot e(\frac{12}{3}) + i(4) \cdot e(\frac{12}{4}) + i(6) \cdot e(\frac{12}{6}) + i(12) \cdot e(\frac{12}{12}) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 28$
- *Möbiussche Umkehrformel: Die Summatorfunktion von φ ist i. Es gilt* $\varphi(12) = 4$ *und* $\sum_{d|12} \mu(d)i(\frac{12}{d}) = \mu(1)i(\frac{12}{1}) + \mu(2)i(\frac{12}{2}) + \mu(3)i(\frac{12}{3}) + \mu(4)i(\frac{12}{4}) + \mu(6)i(\frac{12}{6}) + \mu(12)i(\frac{12}{12}) = 1 \cdot 12 + (-1)6 + (-1)4 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4$ *und* $\sum_{d|12} \mu(\frac{12}{d})i(d) = \mu(\frac{12}{1})i(1) + \mu(\frac{12}{2})i(2) + \mu(\frac{12}{3})i(3) + \mu(\frac{12}{4})i(4) + \mu(\frac{12}{6})i(6) + \mu(\frac{12}{12})i(12) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4$

2 Verallgemeinerung

In diesem Abschnitt soll die Möbiussche μ-Funktion verallgemeinert werden.

Sei $a = p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$ die Primzahlzerlegung von a.

Definition 2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\mu_n : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$ definiert durch*

$$\mu_n(a) := \prod_{\rho=1}^{r} (-1)^{m_\rho} \binom{n}{m_\rho}.$$

Theorem 2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu_{n-1}(a) = \sum_{d|a} \mu_n(d)$.*

Also ist μ_{n-1} die Summatorfunktion von μ_n.

Beweis. Wir werden zuerst die Gleichung für Potenzen von Primzahlen beweisen.

$$\sum_{d|p^m} \mu_n(d) = \sum_{i=0}^{m} \mu_n(p^i) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^m \binom{n-1}{m} = \mu_{n-1}(p^m).$$

Der letzte Schritt wird durch Induktion bewiesen.

$m = 0$: $\sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^m \binom{n-1}{m} = 1 = (-1)^0 \binom{n-1}{0}$.

$m \to m+1$:

$$\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} + (-1)^{m+1} \binom{n}{m+1}$$

$$= (-1)^m \binom{n-1}{m} + (-1)^{m+1} \left[\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} \right]$$ [3]

$$= (-1)^m \binom{n-1}{m} + (-1)^{m+1} \binom{n-1}{m} + (-1)^{m+1} \binom{n-1}{m+1}$$

$$= (-1)^{m+1} \binom{n-1}{m+1}.$$

Es ist klar, dass μ_n multiplikativ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Also folgt $\mu_{n-1}(a) = \mu_{n-1}(p_1^{m_1}) \cdot \ldots \cdot \mu_{n-1}(p_r^{m_r})$

$$= \sum_{d|p_1^{m_1}} \mu_n(d) \cdot \ldots \cdot \sum_{d|p_r^{m_r}} \mu_n(d) = \sum_{d_1|p_1^{m_1},\ldots,d_r|p_r^{m_r}} \mu_n(d_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(d_r)$$

$$= \sum_{d_1|p_1^{m_1},\ldots,d_r|p_r^{m_r}} \mu_n(d_1 \cdot \ldots \cdot d_r) = \sum_{d|a} \mu_n(d).$$ □

Theorem 3. *$\mu_1 = \mu$, wobei μ die Möbius-Funktion ist. $\mu_0 = o$, wobei $o(1) = 1$ und $o(a) = 0$ für $a \neq 1$.*

[3] [Bron 01] Seite 13, Formel 1.38f

Beweis. $\mu_1 = \mu$:
Wenn es ein $d > 1$ gibt mit $d^2 \mid a$, dann ist ein Binomialkoeffizient $\binom{1}{m_\rho}$ in $\mu_1(a) = \prod_{\rho=1}^{r} (-1)^{m_\rho} \binom{1}{m_\rho}$ gleich 0. Dann gilt $\mu_1(a) = 0 = \mu(a)$.
Wenn es kein $d > 1$ mit $d^2 \mid a$ gibt, dann gilt $\mu_1(a) = \prod_{\rho=1}^{r} (-1)^{m_\rho} \binom{1}{m_\rho}$ $= \prod_{\rho=1}^{r} (-1)^1 \binom{1}{1} = \prod_{\rho=1}^{r} (-1) = (-1)^r$.
Daraus folgt $\mu_1(a) = (-1)^r = \mu(a)$.
$\mu_0 = o$:
Falls $a = 1$, dann gilt $\mu_0(a) = \prod_{\rho=1}^{r} (-1)^{m_\rho} \binom{0}{m_\rho} = \prod_{\rho=1}^{0} (-1)^{m_\rho} \binom{0}{m_\rho} = 1 = \mathrm{o(a)}$.
Sonst gilt $\mu_0(a) = \prod_{\rho=1}^{r} (-1)^{m_\rho} \binom{0}{m_\rho} = 0 = o(a)$. □

Definition 3. *Für eine zahlentheoretische Funktion f sei F_n die n-te Summator-Funktion:*

$$F_0 := f$$
$$F_{n+1}(a) := \sum_{d|a} F_n(d).$$

Theorem 4 (Verallgemeinerung der Möbiusschen Umkehrformel (Teil 1))**.**

$$f(a) = \sum_{d|a} \mu_n(\frac{a}{d}) F_n(d) = \sum_{d|a} \mu_n(d) F_n(\frac{a}{d}).$$

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion über n mit Hilfe des Symmetriesatzes geführt:
$n = 0$:
Für $n = 0$ ist der Satz $f(a) = \sum_{d|a} o(\frac{a}{d}) f(d) = \sum_{d|a} o(d) f(\frac{a}{d})$.
Das ist offensichtlich.
$n \to n + 1$:
μ_n ist die Summatorfunktion von μ_{n+1} und F_{n+1} ist die Summatorfunktion von F_n.
Nach dem Symmetriesatz gilt $\sum_{d|a} \mu_{n+1}(\frac{a}{d}) F_{n+1}(d) = \sum_{d|a} F_n(\frac{a}{d}) \mu_n(d)$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{d|a} F_n(\frac{a}{d}) \mu_n(d) = \sum_{d|a} F_n(d) \mu_n(\frac{a}{d}) = f(a)$.
Nach Symmetriesatz gilt wiederum $\sum_{d|a} F_n(d) \mu_n(\frac{a}{d}) = \sum_{d|a} F_{n+1}(\frac{a}{d}) \mu_{n+1}(d) =$

$f(a)$.
Daraus folgt $\sum_{d|a} \mu_{n+1}(\frac{a}{d}) F_{n+1}(d) = \sum_{d|a} \mu_{n+1}(d) F_{n+1}(\frac{a}{d}) = f(a)$. □

Mit der Umkehrformel kann man zu einer Funktion die Funktion berechnen, für die sie die Summatorfunktion ist. Ist das Umgekehrte auch wahr? Ist es möglich, die n-te Summatorfunktion zu einer Funktion f zu berechnen, ohne wiederholt summieren zu müssen. Das ist tatsächlich der Fall.

Definition 4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\tau_n : \mathbb{N}^\times \to \mathbb{Q}$ definiert durch*

$$\tau_n(a) := \prod_{\rho=1}^{r} \frac{\prod_{i=1}^{n}(m_\rho + i)}{n!} = \frac{\prod_{\rho=1}^{r}\prod_{i=1}^{n}(m_\rho + i)}{(n!)^r}.$$

Theorem 5. *Für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ gilt $\tau_n(a) = \sum_{d|a} \tau_{n-1}(d)$.*

Beweis. τ_n ist multiplikativ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$. Also reicht es, $\tau_n(p^m) = \sum_{d|p^m} \tau_{n-1}(d)$ zu beweisen.

$$\sum_{d|p^m} \tau_{n-1}(d) = \sum_{i=0}^{m} \tau_{n-1}(p^i) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(i+j)}{(n-1)!} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(m+j)}{n!} = \tau_n(a).$$

Der letzte Schritt wird durch Induktion bewiesen.
$m = 0$:

$$\sum_{i=0}^{0} \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(i+j)}{(n-1)!} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} j}{(n-1)!} = n\frac{\prod_{j=1}^{n-1} j}{n!} = \frac{\prod_{j=1}^{n} j}{n!}.$$

$m \to m+1$:

$$\sum_{i=0}^{m+1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(i+j)}{(n-1)!} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(i+j)}{(n-1)!} + \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(m+1+j)}{(n-1)!}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n}(m+j)}{n!} + n\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(m+1+j)}{n!} \text{ (nach Induktionsvoraussetzung)}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n}(m+j) + n\prod_{j=1}^{n-1}(m+1+j)}{n!}$$

$$= \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(m+1+j) + n\prod_{j=1}^{n-1}(m+1+j)}{n!}$$

$$= \frac{(m+1)\prod_{j=1}^{n-1}(m+1+j) + n\prod_{j=1}^{n-1}(m+1+j)}{n!}$$

$$= \frac{(m+1+n)\cdot\prod_{j=1}^{n-1}(m+1+j)}{n!} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(m+1+j)}{n!}. \qquad \square$$

Theorem 6. *$\tau_0 = e$, wobei $e(a) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$.*
$\tau_1 = \tau$, wobei τ die Anzahl der Teiler ist. τ_0 ist die Summatorfunktion von μ_0.

Beweis. $\underline{\tau_0 = e}$:

$$\tau_0(a) = \frac{\prod_{\rho=1}^{r}(\prod_{i=1}^{0}(m_\rho+i))}{(0!)^r} = \frac{\prod_{\rho=1}^{r} 1}{1} = 1 \text{ für alle } a \in \mathbb{N}^\times.$$

$\underline{\tau_1 = \tau}$:

$\tau_1(a) = \sum_{d|a}(\tau_0(d)) = \sum_{d|a} 1 = \tau(a)$ für alle $a \in \mathbb{N}^\times$.

τ_0 ist die Summatorfunktion von μ_0: $\mu_0 = e$ und $\tau_0 = e$.
Und $\sum_{d|a}(\mu_0(d)) = \sum_{d|a}(o(d)) = 1 = e(a) = \tau_0(a)$ für alle $a \in \mathbb{N}^\times$. $\square$

Damit ist die Kette vollständig: Die Funktionen $\ldots \mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1\mu_0\tau_0\tau_1\ldots\tau_{n-1}\tau_n\ldots$ bilden eine unendliche Kette. In dieser Kette ist jede Funktion die Summatorfunktion des Vorgängers. Weiter gilt $\mu_1 = \mu$, $\mu_0 = o$, $\tau_0 = e$, $\tau_1 = \tau$.

Theorem 7 (Verallgemeinerung der Möbiusschen Umkehrformel (Teil 2))**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ gilt*

$$F_n(a) = \sum_{d|a}\tau_{n-1}(d)f(\frac{a}{d}) = \sum_{d|a}\tau_{n-1}(\frac{a}{d})f(d).$$

Beweis. Durch Induktion:
$n = 1$:
$\sum_{d|a}\tau_0(d)f(\frac{a}{d}) = \sum_{d|a} f(\frac{a}{d}) = \mathrm{F(a)} = F_1(a)$
und $\sum_{d|a}\tau_0(\frac{a}{d})f(d) = \sum_{d|a} f(d) = F(a) = F_1(a)$.
$n \to n+1$:
Nach dem Symmetriesatz gilt $\sum_{d|a}\tau_n(d)f(\frac{a}{d}) = \sum_{d|a}\tau_{n-1}(\frac{a}{d})F_1(d)$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist $\sum_{d|a}\tau_{n-1}(\frac{a}{d})F_1(d)$ die n-te Summatorfunktion von F_1. Also ist $\sum_{d|a}\tau_n(d)f(\frac{a}{d})$ die $n+1$-te Summatorfunktion von f.

Also gilt $F_{n+1}(a) = \sum_{d|a} \tau_n(d) f(\frac{a}{d})$.
Analog wird $F_{n+1}(a) = \sum_{d|a} \tau_n(\frac{a}{d}) f(d)$. bewiesen.

□

Man kann τ_n auf andere Weise charakterisieren:

Theorem 8. *[Kürzere Formel für τ_n]*

$$\tau_n(a) = \prod_{\rho=1}^{r} \binom{m_\rho + n}{m_\rho}.$$

Proof.

$$\tau_n(a) = \frac{\prod_{\rho=1}^{r} \prod_{i=1}^{n} (m_\rho + i)}{(n!)^r} = \frac{1}{n!}^r \prod_{\rho=1}^{r} \frac{(m_\rho + n)!}{m_\rho!} = \prod_{\rho=1}^{r} \frac{(m_\rho + n)!}{m_\rho! n!} = \prod_{\rho=1}^{r} \binom{m_\rho + n}{m_\rho}.$$

□

Beispiel 3.
Die Summatorfunktion von φ ist i und die von i ist σ.
Es gilt $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. Nach der 1. Umkehrformel muss gelten: $\sigma(12) = \sum_{d|a} \tau_1(d) \varphi(\frac{12}{d})$.

$\sum_{d|a} \tau_1(d) \varphi(\frac{12}{d})$
$= \tau_1(1)\varphi(12) + \tau_1(2)\varphi(6) + \tau_1(3)\varphi(4) + \tau_1(4)\varphi(3) + \tau_1(6)\varphi(2) + \tau_1(12)\varphi(1)$
$= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 28$
.

Beispiel 4.
Die Summatorfunktion von φ ist i und die von i ist σ.
Es gilt $\varphi(12) = 4$. Nach der 2. Umkehrformel muss gelten: $\varphi(12) = \sum_{d|a} \mu_2(d) \sigma(\frac{12}{d})$.

$\sum_{d|a} \mu_2(d) \sigma(\frac{12}{d})$
$= \mu_2(1)\sigma(12) + \mu_2(2)\sigma(6) + \mu_2(3)\sigma(4) + \mu_2(4)\sigma(3) + \mu_2(6)\sigma(2) + \mu_2(12)\sigma(1)$
$= 1 \cdot \sigma(12) + (-1)^1 \binom{2}{1} \sigma(6) + (-1)^1 \binom{2}{1} \sigma(4) + (-1)^2 \binom{2}{2} \sigma(3) + (-1)^1 \binom{2}{1} (-1)^1 \binom{2}{1} \sigma(2) +$
$(-1)^2 \binom{2}{2} (-1)^1 \binom{2}{1} \sigma(1)$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \cdot \sigma(12) - 2\sigma(6) - 2\sigma(4) + 6\sigma(3) + 4\sigma(2) - 2\sigma(1) \\
&= 28 - 2 \cdot 12 - 2 \cdot 7 + 4 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\
&= 28 - 24 - 14 + 4 + 12 - 2 = 4
\end{aligned}
$$

3 φ

Die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt können noch weiter verallgemeinert werden. Es sollen im Folgenden zu beliebigen multiplikativen Funktionen iterierte Summatorfunktionen bzw. die Inversen berechnet werden. Insbesondere kann das auf φ angewendet werden.

Definition 5 (Inverse der Summatorfunktion)**.**
Definiere zu multiplikativem $f : \mathbb{N}^\times \longrightarrow \mathbb{Q}$ *und zu* $n \in \mathbb{N}$ f_n *durch*

$$f_n(p^m) := \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i})$$

und

$$f_n(p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}) := \prod_{i=1}^{r} f_n(p_i^{m_i})$$

Dabei sei $\binom{n}{i} := 0$ für $n < i$.

Theorem 9. *f ist die n-te Summatorfunktion von f_n.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion.
$n = 0$:
Es reicht wieder, den Beweis nur für Potenzen von Primzahlen zu führen.
$f_0(p^m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) = (-1)^0 \binom{0}{0} f(p^{m-0}) = f(p^m)$.
$n \to n+1$:
Es ist $f_{n+1}(p^m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i})$ zu beweisen.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt, dass f die n-te Summatorfunktion von $f_n(p^m) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i})$ ist.
Falls $m \leq n$ folgt
$f_{n+1}(p^m) = f_n(p^m) - f_n(p^{m-1})$
$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) - \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-1-i})$
$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) - \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} f(p^{m-i})$
$= (-1)^0 \binom{n}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{m} \left[(-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) - (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} f(p^{m-i}) \right]$
$= (-1)^0 \binom{n}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] f(p^{m-i})$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i})$$ [4]

$$= (-1)^0 \binom{n+1}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i}).$$

Falls $n < m$ folgt

$$f_{n+1}(p^m) = f_n(p^m) - f_n(p^{m-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) - \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-1-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-1-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} f(p^{m-i})$$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{n} \left[(-1)^i \binom{n}{i} f(p^{m-i}) - (-1)^{i-1} \binom{n}{i-1} f(p^{m-i}) \right]$$
$$\quad -(-1)^n \binom{n}{n} f(p^{m-(n+1)})$$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] f(p^{m-i})$$
$$\quad +(-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} f(p^{m-(n+1)})$$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i}))$$
$$\quad +(-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} f(p^{m-(n+1)})$$ [5]

$$= (-1)^0 \binom{n+1}{0} f(p^m) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i}) + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} f(p^{m-(n+1)})$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n+1}{i} f(p^{m-i}). \qquad \square$$

---

[4] wegen $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$

[5] wegen $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$

Definition 6 (Summatorfunktion).
Definiere zu multiplikativem $f : \mathbb{N}^\times \longrightarrow \mathbb{Q}$ *und zu* $n \in \mathbb{N}$ s_n *durch*

$$s_n(p^m) := \sum_{i=0}^{m} \binom{n+m-1-i}{n-1} f(p^i)$$

und

$$s_n(p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}) := \prod_{i=1}^{r} s_n(p_i^{m_i})$$

Theorem 10. s_n *ist die* n*-te Summatorfunktion von* f.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion über n.
$\underline{n=1}$:
$s_1(p^m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{1+m-1-i)}{1-1} f(p^i) = \sum_{i=0}^{m} f(p^i)$
$\underline{n \to n+1}$:
$\underline{s_{n+1}(p^m)} = s_n(p^0) + \ldots + s_n(p^m)$

$$= \sum_{i=0}^{0} \binom{n+0-1-i}{n-1} f(p^i)$$
$$+ \sum_{i=0}^{1} \binom{n+1-1-i}{n-1} f(p^i) + \ldots$$
$$+ \sum_{i=0}^{m} \binom{n+m-1-i}{n-1} f(p^i)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} \binom{n+j-1-0}{n-1} f(p^0)$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \binom{n+j-1-1}{n-1} f(p^1) + \ldots$$
$$+ \sum_{j=m}^{m} \binom{n+j-1-m}{n-1} f(p^m)$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{n+1+m-1-i}{n} f(p^i).$$

Der letzte Schritt soll durch Induktion über m bewiesen werden:

$$\sum_{j=k}^{m} \binom{n+j-1-k}{n-1} = \binom{n+1+m-1-k}{n}.$$

Induktionsanfang ($m = k$):

$$\sum_{j=k}^{k} \binom{n+j-1-k}{n-1} = \binom{n+k-1-k}{n-1} = \binom{n-1}{n-1} = 1 \text{ und}$$

$$\binom{n+1+k-1-k}{n} = \binom{n}{n} = 1.$$

Induktionsschluss ($m \longrightarrow m+1$):

$$\sum_{j=k}^{m+1} \binom{n+j-1-k}{n-1} = \sum_{j=k}^{m} \binom{n+j-1-k}{n-1} + \binom{n+m+1-1-k}{n-1}$$
$$= \binom{n+1+m-1-k}{n} + \binom{n+m+1-1-k}{n-1}$$
$$= \binom{(n+1)+(m+1)-1-k}{n} \qquad \square$$

Beispiel 5.
Wie schon erwähnt, ist σ die 2. Summatorfunktion von φ.
Es gilt $s_2(12) = \sum_{i=0}^{2} \binom{2+2-1-i}{1} \varphi(2^i) \cdot \sum_{i=0}^{1} \binom{2+1-1-i}{1} \varphi(3^i)$
$$= \left(\binom{2+2-1-0}{1} \varphi(1) + \binom{2+2-1-1}{1} \varphi(2) + \binom{2+2-1-2}{1} \varphi(4) \right)$$
$$\left(\binom{2+1-1-0}{1} \varphi(1) + \binom{2+1-1-1}{1} \varphi(3) \right)$$
$$= \left(\binom{3}{1} \varphi(1) + \binom{2}{1} \varphi(2) + \binom{1}{1} \varphi(4) \right) \left(\binom{2}{1} \varphi(1) + \binom{1}{1} \varphi(3) \right)$$
$= (3\varphi(1) + 2\varphi(2) + 1\varphi(4))\,(2\varphi(1) + 1\varphi(3))$
$= (3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2)\,(2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = 7 \cdot 4 = 28$
Und es gilt $\sigma(12) = 28$.

4 Folgerungen

Aus den Sätzen ergeben sich weitere Resultate:

Folgerung 1.

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

.

Beweis. Nach Satz 2 gilt $\mu_{n-1}(a) = \sum_{d|a} \mu_n(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$.

Damit folgt $\mu_{n-1}(p^m) = \sum_{i=0}^{m} \mu_n(p^i)$.

Daraus folgt $(-1)^m \binom{n-1}{m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n}{i}$. □

Folgerung 2. $\sum_{i=0}^{m} \binom{i+n+1}{i} = \binom{m+n}{m}$.

Beweis. Nach Satz 5 gilt für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ $\tau_n(a) = \sum_{d|a} \tau_{n-1}(d)$.

Weiter gilt nach Satz 8 für alle $a \in \mathbb{N}^\times$ $\tau_n(a) = \prod_{\rho=1}^{r} \binom{m_\rho + n}{m_\rho}$.

Daraus folgt $\tau_n(p^m) = \binom{m+n}{m}$. Einsetzen ergibt $\tau_n(p^m) = \binom{m+n}{m} = \sum_{i=0}^{m} \tau_{n-1}(p^i) = \sum_{i=0}^{m} \binom{i+n-1}{i}$. □

Literatur

[Bron 01] Bronstein, Semendjajew ua. *Taschenbuch der Mathematik* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2001.

[Rem 81] R. Remmert. *Elementare Zahlentheorie, Kurs 1323.* Fernuniversität Hagen, Hagen 1981.